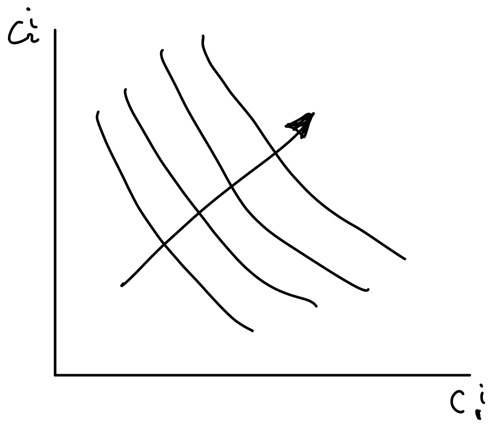
Capítulo 4: modelo de intercambio intertemporal.

- Simplificación: - no hay firmas
  - no hay producción
- Única actividad: - intercambio de bienes
  - consumo.
- Cada periodo, hogares reciben una dotación de bienes.
- Individuos viven varios periodos.
- Hay un único bien.
- Intercambio es de carácter intertemporal: los individuos adquieren o dan consumo presente a cambio de consumo futuro.

Modelo de T=2 periodos:

- Periodos $t=1,2$.
- I consumidores.
- Dotaciones (y_t^1, y_t^2), $y_t^i \geq 0$, $i \in \{1,\dots,I\}$, $t=1,2$.

  periodo.
- Individuos tienen certeza sobre dotaciones futuras.
  - modelo determinístico.
- Individuos potencialmente difieren en sus dotaciones iniciales.
- Bien es perecedero.
- Preferencias: $U_i(c_1^i, c_2^i)$
  - monótona creciente
  - cuasicóncava
  - continua y diferenciable.



curvas de indif son convexas con respecto al origen

=> hogares prefieren canastas de consumo "balanceadas"

$\boxed{\text{suavización del consumo}}$

$$\underbrace{U_i(c_1^i, c_2^i) = u_i(c_1^i)}_{\text{utilidad inmediata.}} + \beta u_i(c_2^i) \rightarrow \text{aditiva y separable en el tiempo.}$$

β ↳ factor de descuento.

u_i es monótona creciente y cóncava.

$0 < \beta < 1$: futuro se "descuenta" a una tasa β.

β cercano a cero => el individuo es "impaciente".

$\beta := \frac{1}{1+\rho}$, $\rho > 0$

ρ = "tasa de descuento"

β = "factor de descuento".

$$TMS = \frac{\partial U_i / \partial c_1}{\partial U_i / \partial c_2} = \frac{u'(c_1^i)}{\beta u'(c_2^i)}$$

Ej: $u(c_i) = \ln c \rightarrow$ cobb-douglas

$$U(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

$$TMS = \frac{(1/c_1)}{(\beta / c_2)} = \frac{c_2}{\beta c_1} = (1+\rho)\frac{c_2}{c_1}$$

- Intercambio de bienes se da mediante una promesa de dar/recibir un bien en el presente a cambio de dar/recibir bienes en el futuro.
- las promesas se cumplen.

Restricción presupuestal:

$$c_1^i + b_1^i = y_1^i \qquad\qquad c_2^i = y_2^i + (1+r)\, b_1^i$$

b_i: unidades del bien que el individuo ahorra/presta/cede en $t=1$ a cambio de recibir $(1+r)b_i$ en $t=2$.

Puede ser negativo.

b_i: "bonos" que el individuo adquiere para recibir bienes en $t=2$.

- $b_i > 0$: $c_1^i < y_1^i$, $c_2^i > y_2^i$ $\Rightarrow$ ahorrador
- $b_i < 0$: $c_1^i > y_1^i$, $c_2^i < y_2^i$ $\Rightarrow$ deudor.

Individuo siempre tiene la opción de $b_i = 0$ $\Rightarrow$ vivir en autarquía.

r: tasa de interés real. Individuos la toman como dada y se determina en equilibrio.

Puede ser negativa o positiva dependiendo de:
- impaciencia de los hogares
- la escasez relativa de recursos en presente vs. futuro.

Problema del hogar:

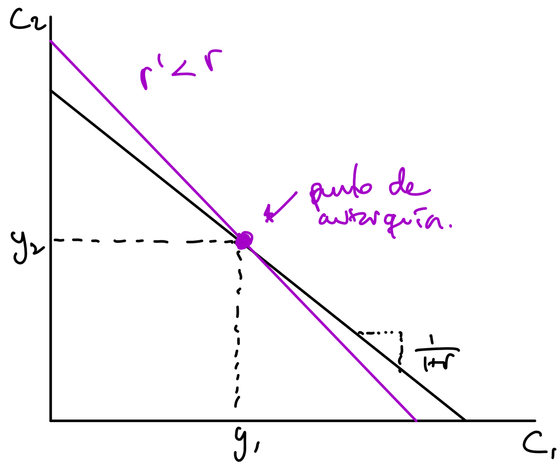
$$\max_{c_1^i, c_2^i} u(c_1) + \beta u(c_2) \quad \text{s.a.} \quad c_1^i + b^i = y_1^i$$
$$c_2^i = y_2^i + (1+r) b^i$$

$$b = y_1 - c_1$$

$$c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1) = y_2 + (1+r) y_1 - (1+r) c_1$$

$$(1+r) c_1 + c_2 = (1+r) y_1 + y_2$$

$$\boxed{c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}}$$ → restricción presupuestal intertemporal.



$$c_1 = \left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right) - \frac{c_2}{1+r}$$

Problema:

$$\max_{c_1, c_2} \ \ln c_1 + \beta \ln c_2 \quad \text{s.a.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

$$\mathcal{L} = \ln c_1 + \beta \ln c_2 + \lambda\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right)$$

Condiciones de optimalidad:

$$\boxed{\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = 1+r} \longrightarrow \text{condición eficiencia intertemporal.}$$

$$u'(c_1) = \beta(1+r)\,u'(c_2) \longrightarrow \text{ecuación de euler}$$

$$\boxed{c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}} \longrightarrow \text{restr. intertemporal.}$$

Con cobb-douglas:

$$\frac{c_2}{\beta c_1} = 1+r \quad \Rightarrow \quad c_2 = \beta(1+r)\,c_1$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

$$c_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r)}c_1}{\cancel{1+r}} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

$$\Rightarrow c_1 + \beta c_1 = (1+\beta)c_1 = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1^* = \frac{1}{1+\beta}\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right)}$$ → función de demanda del bien en t=1

riqueza del individuo en valor presente.

$$\Rightarrow \boxed{c_2^* = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right)}$$ → función de demanda del bien t=2.

$$\boxed{b^* = y_1 - c_1^* = y_1 - \frac{1}{1+\beta}\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right)}$$

Equilibrio: Hay I individuos.

- r^* es la tasa de interés que vacía los mercados:
  - bienes y servicios.
  - ahorro/bonos.

mercado de bienes:

$$\sum_{i=1}^{I} c_1^i(r^*) = \sum_{i=1}^{I} y_1^i \quad \rightarrow \text{en } t=1.$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_2^i(r^*) = \sum_{i=1}^{I} y_2^i \quad \rightarrow \text{en } t=2.$$

mercado de bonos:

$$\sum_{i=1}^{I} b_i(r^*) = 0$$

$b_i > 0$ ahorra

$b_j < 0$ endeuda

$b_i = 1$

$b_j = -1$

Si $b_i > 0$ para algún i, debe existir un j tal que $b_j < 0$.

Agente representativo: todos los individuos son idénticos,

$$\left.\begin{array}{l} b_i^* = b_j^* \quad \forall i,j. \\ \sum_{i=1}^{I} b_i^* = 0 \end{array}\right\} \; b_i^* = b_j^* = 0$$

Si $b_i = 0$ $\Rightarrow$ $c_1^i + \cancel{b_i}^{\,0} = y_1^i$ $\Rightarrow$ $c_1^i = y_1^i$

$c_2^i = y_2^i + \cancel{(1+r)b_i}^{\,0}$ $\Rightarrow$ $c_2^i = y_2^i$

$$\frac{c_2}{\beta c_1} = 1+r \Rightarrow \boxed{1+r^* = \frac{y_2}{\beta y_1}}$$ tasa de interés de equilibrio.

$$r^* = \frac{y_2}{\beta y_1} - 1$$

Si y_1 aumenta:

- El individuo es más rico.
- $\Rightarrow$ individuo va a ~~querer~~ consumir más c_1, c_2
- $\Rightarrow$ hogar quiere ahorrar.

$\Rightarrow$ para que $b_i = 0$ en equilibrio, r^* debe disminuir.

Modelo con T periodos:

- Individuos viven $T \geq 2$ periodos.
- Dotaciones $(y_1^i, y_2^i, \dots, y_T^i)$, $y_t^i \geq 0$
- Hogares escogen un plan de consumo: $(c_1^i, c_2^i, \dots, c_T^i)$, $c_t^i \geq 0$
- Preferencias: $U(c_1^i, \dots, c_T^i) = u(c_1^i) + \beta u(c_2^i) + \beta^2 u(c_3^i) + \dots + \beta^{T-1} u(c_T^i)$

$$= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t^i)$$

- Cada periodo, el hogar puede comprar bonos b_t^i
- Restricción presupuestal: $\boxed{c_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1})\, b_{t-1}^i}$

r_{t-1}: tasa de interés pactada en el momento en que el hogar ahorró / adquirió la deuda.

Problema del consumidor:

Hasta ahora Asumimos que $b_0^i = 0$.

De ahora en adelante asumimos que bo es exógeno

$$\max_{c_1,\dots,c_T} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t^i) \quad \text{s.a.} \quad \begin{aligned} c_1^i + b_1^i &= y_1^i + (1+r_0) b_0^i \\ c_2^i + b_2^i &= y_2^i + (1+r_1) b_1^i \\ &\vdots \\ c_T^i + b_T^i &= y_T^i + (1+r_{T-1}) b_{T-1}^i \end{aligned}$$

en equilibrio $b_T^i = 0$

Para construir restricción intertemporal, idea es "deshacernos" de b_t^i en el problema:

En $t=T$: $\quad b_T = 0 \quad \Rightarrow \quad c_T = y_T + (1+r_{T-1}) b_{T-1}$

$$b_{T-1} = \frac{1}{1+r_{T-1}}(c_T - y_T)$$

En $t = T-1$: $\quad c_{T-1} + b_{T-1} = y_{T-1} + (1+r_{T-2}) b_{T-2}$

$$c_{T-1} + \frac{1}{1+r_{T-1}}(c_T - y_T) = y_{T-1} + (1+r_{T-2}) b_{T-2}$$

$$b_{T-2} = \frac{1}{1+r_{T-2}}(c_{T-1} - y_{T-1}) + \frac{1}{(1+r_{T-1})(1+r_{T-2})}(c_T - y_T)$$

En $t = T-2$: $\quad \dots$

$\vdots$

$$\boxed{c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} + \frac{c_3}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{c_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = y_1 + \frac{y_2}{1+r_1} + \frac{y_3}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{y_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})}}$$